УДК 517.9

АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНЫМИ КОМБИНАЦИЯМИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

©И. Я. Ройтберг, Я. А. Ройтберг

1. **Постановка задачи.** Пусть $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей ∂G. Пусть в G задано правильно эллиптическое выражение $L = L(x, D)$ по- рядка $2m$ с бесконечно гладкими коэффициентами. Пусть для L в G существует глобальное нормальное фундаментальное решение $\Phi(x, y)$ $(x, y \in G, x \neq y)$ /см. ниже п.3/. Пусть $\Omega \subset \overline{\Omega} \subset G$ -ограниченная область с бесконечно гладкой границей Γ, причем $G \setminus \overline{\Omega}$ связано.

Рассмотрим в Ω эллиптическую граничную задачу с нормальными граничными условиями [1-4]

$$Lu = f \ (\text{в}\Omega), \ \ B_j(x, D)u|_\Gamma = \phi_j \ \ (j = 1, ..., m) \tag{1}$$

/$\operatorname{ord} B_j = m_j < 2m$/. Пусть $K \subset G \setminus \overline{\Omega}$ - кусок гладкой $(n-1)$ - мерной поверхности и пусть $(y_k)_{k=1}^{\infty} \subset G \setminus \overline{\Omega}$ последовательность, плотная в K / т.е. $\overline{(y_k)} \supset K$/. Пусть

$$\phi = (\phi_1, ..., \phi_m), \ \ \phi_j \in B^{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}(\Gamma), \ \ s \in R, \ \ 1 < p < \infty \tag{2}$$

/$B^{t,p}(\Gamma)$ -простанство Бесова, $\ll \cdot, \Gamma \gg_{t,p}$ -норма в нем /см. ниже п.2/ /.

В работах Хаманна [5,6] поставлен вопрос: существует ли последовательность

$$u_l(x) = \sum_{k=1}^{l} \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} c_{kl}^{(l)} (D_y^\alpha \Phi)(x, y_k) \ (l = 1, 2, ...) \tag{3}$$

/$c_{k\alpha}^{(l)}$ - комплексные числа/, такая, что

$$\lim_{l \to \infty} \left(\sum_{j=1}^{m} \ll \phi_j - B_j u_l, \Gamma \gg_{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}\right) = 0. \tag{4}$$

Интерес к этой задаче связан со следующим: если, например, дефект отсутсутвует, то из (4) следует, что u_l сходится в пространстве $H^{2m+s,p}(\Omega)$ лиувиллевских классов к решению u задачи (1) с $f = 0$

$$||u - u_l, \Omega||_{2m+s,p} \leq c \sum_{j=1}^{m} \ll \phi_j - B_j u, \Gamma \gg_{2m+s-m_j-\frac{1}{p},p}$$

см. подробнее [5] и приведенную там литературу/.

В [5,6] исследуется рассматриваемая задача в случае, когда коэффициенты выражения L постоянны, причем применяемая там методика существенно использует постоянство коэффициентов. В данной работе применяется другая методика, связанная с использованием теоремы о полном наборе изоморфизмов [2-4] и теорем о глобальных фундаментальных решениях [7]. Эта методика позволила отказаться от постоянства коэффициентов, позволила исследовать рассматриваемую задачу для систем, эллиптических по Петровскому, с переменными коэффициентами.

Наконец, отметим, что данная работа тесно примыкает к исследованиям о плотности множества решений эллиптических граничных задач на многообразиях внутри области, которые развивали многие математики /см., например, [8-10] и приведенную там библиографию/.

1. **Функциональные пространства.** Для любой области $\Omega \subset R^n$ с гладкой границей $\partial\Omega$ обозначим через $H^{s,p}(\Omega)$ $(s \geq 0,\ 1 < p < \infty)$ пространство лиувиллевских классов /бесселевых потенциалов/, а через $H^{-s,p'}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ - пространство, сопряженное $H^{s,p}(\Omega)$ относительно расширения $(\cdot,\cdot)_\Omega$ скалярного произведения в $L_2(\Omega)$; $\|\cdot,\Omega\|_{s,p}$ - норма в $H^{s,p}(\Omega)(s \in R, 1 < p < \infty)$. Пространство $H^{-s,p'}(\Omega)$, $(s > 0)$ -изометрически изоморфно подпространству $H^{-s,p'}_{\overline{\Omega}}(R^n) = \{u \in H^{-s,p'}(R^n) : \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\}$ пространства $H^{-s,p'}(R^n)$. Поэтому, если $\Omega_0 \subset \overline{\Omega}_0 \subset \Omega$, то можно считать, что $H^{-s,p'}(\Omega_0) \subset H^{-s,p'}(\Omega)$.

Для каждого $s \geq 0$ и $1 < p < \infty$ положим $\overset{\circ}{H}{}^{s,p}(\Omega) = H^{s,p}_{\overline{\Omega}}(R^n) = \{u \in H^{s,p}(R^n) : \operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}\}$. Через $H'^{-s,p'}(\Omega)$ обозначим пространство, сопряженное $\overset{\circ}{H}{}^{s,p}(\Omega)$ относительно $(\cdot,\cdot)$.
$\|u,\Omega\|'_{-s,p'} = \sup_{v \in \overset{\circ}{H}{}^{s,p}(\Omega)} |(u,v)_\Omega|(\|v,R^n\|_{s,p})^{-1}$ -норма в $H'^{-s,p'}(\Omega)$. Если $s \geq 0$, $v \in \overset{\circ}{H}{}^{s,p}(\Omega)$, $s \neq k + \frac{1}{p}$ $(k = 0,1,2,...)$, то $\overset{\circ}{H}{}^{s,p}(\Omega)$ изоморфно замыканию C_0^∞ в $H^{s,p}(\Omega)$. Наконец отметим, что если $u \in H'^{-s,p'}(\Omega)$ $(s > 0)$, а $\operatorname{supp} u \subset \overline{\Omega}_0$, то $u \in H^{-s,p'}(\Omega_0)$ и $\|u,\Omega_0\|_{-s,p'} = \|u,\Omega\|'_{-s,p'}$.

Для каждого $s \in R$ и $1 < p < \infty$ обозначим через $B^{s,p}(\partial\Omega)$, пространство Бесова; пространства $B^{s,p}(\partial\Omega)$ и $B^{-s,p'}(\partial\Omega)(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ взаимно сопряжены относительно расширения $< \cdot,\cdot >_{\partial\Omega}$ скалярного произведения в $L_2(\partial\Omega)$; $\ll u, \partial\Omega \gg_{s,p}$ - норма в $B^{s,p}(\partial\Omega)$.

Зафиксируем натуральное число r и пусть $s \in R$, $1 < p < \infty$, $s \neq k + \frac{1}{p}$ $(k = 0,1,...,r-1)$. Через $\tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$ [11,4] обозначим пополнение $C^\infty(\overline{\Omega})$ по норме

$$|||u,\Omega|||_{s,p,(r)} = \left(\|u,\Omega\|^p_{s,p} + \sum_{j=1}^{r} \ll D_\nu^{j-1}u, \partial\Omega \gg^p_{s-j+1-\frac{1}{p},p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{5}$$

$(D_\nu = i\partial/\partial\nu$, $\partial/\partial\nu$ – производная по нормали к $\partial\Omega)$. Для $s = k + \frac{1}{p}$ $(k = 0,...,r-1)$ определим пространство $\tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$ и норму (5) с помощью комплексной интерполяции. Ясно, что замыкание $S = S_r$ отображения

$$u \;\to\; (u|_{\overline{\Omega}}, u|_{\partial\Omega}, ..., D_\nu^{r-1}u|_{\partial\Omega}) \;\; (u \in C^\infty(\overline{\Omega}))$$

устанавливает изометрию между $\tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$ и подпространством пространства $H^{s,p}(\Omega) \times \prod_{1 \leq j \leq r} B^{s-j+1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = K^{s,p}$, при этом, если $s < \frac{1}{p}$, то $S\tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega) = K^{s,p}$. Поэтому можно отождествить $u \in \tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$ с элементом $Su = (u_0, u_1, ..., u_r) \in K^{s,p}$; будем писать $u = (u_0, u_1, ..., u_r) \in \tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$, $u|_{\overline{\Omega}} = u_0$ для каждого $u \in \tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$. Пространство $\tilde{H}^{s,p,(r)}(\Omega)$ изучено в [4,11].

3. **Фундаментальные решения эллиптических операторов.** Пусть $G \subset R^n$ - ограниченная область с границей ∂G, L -правильно эллиптическое выражение порядка $2m$ с бесконечно гладкими в $\overline{G}$ коэффициентами.

Функцию $\Phi(x,y)$ $(x, y \in G, x \neq y)$ называют глобальным фундаментальным решением /г.ф.р./ в G оператора L, если оператор

$$f \to \int_G \Phi(x,y)f(y)dy = u(x) \;\; (f \in L_p(G);\ 1 < p < \infty) \tag{6}$$

непрерывно действует из $L_p(G)$ в $H^{2m,p}(G)$ и $Lu = f$. Г.ф.р. называют нормальным, если $\overline{\Phi(y,x)}$ является г.ф.р. формально сопряженного оператора $L^+(x,D)$.

Оказывается [7], что для существования г.ф.р. оператора L необходима и достаточна единственность задачи Коши для уравнения $L^+u = 0$, а для существования нормального г.ф.р. необходима и достаточна единственность задачи Коши как для уравнения $L^+u = 0$, так и для уравнения $Lu = 0$. В [7] изучены также свойства регулярности г.ф.р. В частности, из приведенных в [7] рассуждений следует, что если $\Phi(x,y)$ - г.ф.р. оператора L, то отображение (6) непрерывно действует также из $H^{-s,p}(G)$ $(s > 0)$ соответственно в $H^{2m-s,p}(G)$, если $2m - s \geq 0$ и в $H'^{2m-s,p}(G)$, если $2m - s < 0$. Поэтому, расширив по непрерывности отображение (6), получим, что для каждого $f \in H^{-s,p}(G)$ $(s > 0)$ существует $u(x) = \int_G \Phi(x,y)f(y)dy = (\Phi(x,\cdot), f)_G$, отображение $f \to u$ непрерывно в паре пространств

$$H^{-s,p}(G) \to H^{2m-s,p}(G) \ \ (s \geq 0, 2m - s \geq 0);$$

$$H^{-s,p}(G) \to H'^{2m-s,p}(G) \ \ (s \geq 0, 2m - s < 0);$$

$Lu = f$ внутри G /т.е. $(u, L^+v)_G = (f,v)_G$ $(\forall v \in C_0^\infty(G))$/.

Для нормального г.ф.р. подобные свойства справедливы также и для $L^+(x, D)$.

4. **Основные результаты.** 4.1. Рассмотрим в Ω граничную задачу (1) с нормальными граничными условиями [1-4]. Пусть выражения $\{C_j(x,D)\}_{j=1,\dots,m}$ порядков $l_j < 2m$ дополняют выражения $\{B_j(x,D)\}$ до системы Дирихле порядка $2m$, тогда существуют выражения $B_j'(x,D)$ $C_j'(x,D)$ порядков m_j', l_j' $(j = 1,\dots,m)$ такие, что

$$m_j + l_j' = m_j' + l_j = 2m - 1 \ \ (j = 1,\dots,m) \tag{7}$$

и справедлива формула Грина [1-4]

$$(Lu,v)_\Omega + \sum_{j=1}^m \langle B_j u, C_j' v\rangle_\Gamma = (u, L^+v)_\Omega + \sum_{j=1}^m \langle C_j u, B_j' v\rangle_\Gamma \tag{8}$$
$$(u, v \in C^\infty(\overline{\Omega})).$$

Задачу

$$L^+v = g \ (\text{в}\, \Omega), \ \ B_j' v|_\Gamma = \Psi_j \ \ (j = 1,\dots,m) \tag{9}$$

называют формально сопряженной задаче (1) относительно формулы Грина (8). Она эллиптична в том и только в том случае, когда эллиптична задача (1). Ядро

$$\mathfrak{N}^* = \{v \in C^\infty(\overline{\Omega}) : L^+v(x) = 0\, (x \in \Omega), \ B_j'|_\Gamma = 0 \ (j = 1,\dots,m)\} \tag{10}$$

конечномерно и для разрешимости задачи (1) в $\tilde{H}^{2m+s,p,(2m)}(\Omega)$ с любым $s \in R$, $1 < p < \infty$, $f \in H^{s,p}(\Omega)$, $\phi_j \in B^{2m+s-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$(f,v)_\Omega + \sum_{j=1}^m \langle \phi_j, C_j' v\rangle_\Gamma = 0 \ \ (\forall v \in \mathfrak{N}^*). \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть $s \in R$, $1 < p < \infty$, $\phi = (\phi_1, ..., \phi_m)$ удовлетворяет (2) и*

$$\sum_{j=1}^{m} \langle \phi_j, C'_j v \rangle_\Gamma = 0 \ (\forall v \in \mathfrak{N}^*) \tag{12}$$

и пусть существует нормальное г.ф.р. $\Phi(x,y)\,(x, y \in G, x \neq y)$ оператора $L(x, D)$. Тогда существует последовательность (3), удовлетворяющая (4).

Доказательство. Отметим вначале, что условие (12) необходимо для существования последовательности (3), удовлетворяющей (4). Действительно, поскольку $Lu_l(x) = 0$ $(x \in \overline{\Omega})$, то из формулы Грина (8) с $u = u_l$ и $v \in \mathfrak{N}^*$ непосредственно следует, что

$$\sum_{j=1}^{m} \langle B_j u_l, C'_j v \rangle_\Gamma = 0 \ (\forall v \in \mathfrak{N}^*).$$

Перейдя здесь к пределу при $l \to \infty$ получим из (4) соотношение (12).

Для доказательства теоремы достаточно доказать, что если

$$\eta = (\eta_1, ..., \eta_m) \in \prod_{1 \le j \le m} B^{-(2m+s-m_j-1/p),p'}(\Gamma) \tag{13}$$

удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{j=1}^{m} \langle B_j(x, D)(D_y^\alpha \Phi(x, y_k), \eta_j \rangle_\Gamma = 0 \ (|\alpha| \le 2m - 1; k = 1, 2, ...), \tag{14}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \langle \eta_j, C'_j v \rangle_\Gamma = 0 \ (\forall v \in \mathfrak{N}^*), \tag{15}$$

то $\eta_1 = ... = \eta_m = 0$.

Из (7) и(13) следует, что $\eta_j \in B^{-s-l'_j-1/p',p'}(\Gamma)$ $(j = 1, ..., m)$. Поскольку выражения $\{B'_j, C'_j\}_{j=1,...,m}$ образуют систему Дирихле порядка $2m$, то по лемме 2.2 из [11] / см. также [4], III, с. 6/, существует $w \in \tilde{H}^{-s,p',(2m)}(\Omega)$ такой, что

$$B'_j w|_\Gamma = 0, \ C'_j w|_\Gamma = \eta_j \ \ (j = 1, ..., m); \tag{16}$$

$$|||w, \Omega|||_{-s,p',(2m)} \le C \sum_{1 \le j \le m} \ll \eta_j, \Gamma \gg_{-s-l'_j-1/p',p'} . \tag{17}$$

Записав теперь формулу Грина (8) с $u = (D_y^\alpha \Phi)(x, y)$ $(x \in \overline{\Omega}, y \in G/\overline{\Omega})$, $v = w$, получим, учитывая, что $L(x, D_x)\Phi(x, y) = 0$:

$$\sum_{j=1}^{m} \langle B_j(x, D_x)(D_y^\alpha \Phi(x, y)), \eta_j \rangle_\Gamma = (D_y^\alpha \Phi(x, y), g(x)); \tag{18}$$

$$g = L^+ w|_{\overline{\Omega}} \in H^{-s-2m,p'}(\Omega). \tag{19}$$

Если $-s - 2m < 0$, то можно считать, что $g \in H^{-s-2m,p'}(G)$, $\operatorname{supp} g \subset \overline{\Omega}$ /см. п.2/. Но тогда /см. п.3/

$$\omega_0(y) = (\Phi(\cdot, y), g)_\Omega \tag{20}$$

принадлежит $H^{-s,p'}(G)$, если $-s \ge 0$, и $H'^{-s,p'}(G)$, если $-s < 0$. Кроме того, $L^+\omega_0 = g$ внутри Ω и

$$L^+\omega_0(x) = 0 \ (x \in G/\overline{\Omega}), \ \omega_0 \in C^\infty(G/\overline{\Omega}). \tag{21}$$

Подставив теперь в (18) y_k вместо y и воспользовавшись соотношениями (14), получим, что

$$(D^\alpha \omega_0)(y_k) = 0 \ (|\alpha| \le 2m-1; k = 1, 2, \ldots). \tag{22}$$

Отсюда, благодаря гладкости функции w_0 в $G/\overline{\Omega}$ и плотности (y_k) в K, получаем, что

$$D^\alpha \omega_0|_K = 0 \ (|\alpha| \le 2m-1). \tag{23}$$

Из (21),(23), благодаря единственности задачи Коши для уравнения $L^+v = 0$, получаем, что

$$\omega_0(y) = 0 \ (\forall y \in G/\overline{\Omega}). \tag{24}$$

Поэтому $\omega_0 \in H^{-s,p'}(G)$, $\text{supp}\omega_0 \subset \overline{\Omega}$. Но тогда элемент $\omega = (\omega_0, 0, \ldots, 0) \in \tilde{H}^{-s,p',(2m)}(\Omega)$ удовлетворяет равенствам /см. [4]/

$$L^+\omega|_{\overline{\Omega}} = g; \ B_j'\omega|_\Gamma = 0 \ C_j'\omega|_\Gamma = 0 \ (j = 1, \ldots, m). \tag{25}$$

Из (16),(19) и (25) следует, что $z = w - \omega \in \tilde{H}^{-s,p',(2m)}(\Omega)$ удовлетворяет равенствам

$$L^+z|_{\overline{\Omega}} = 0; \ B_j'z|_\Gamma = 0, \ C_j'(z) = \eta_j \ (j = 1, \ldots, m). \tag{26}$$

Из (26) следует, что $z \in \mathfrak{N}^*$, но тогда из (26) и (15) следует, что $\eta_1 = \ldots = \eta_m = 0$, и теорема доказана в рассматриваемом случае $-s - 2m < 0$. Случай $-s - 2m \ge 0$ рассматривается вполне аналогично.

4.2. **Теорема 2**. *Пусть в условиях теоремы 1 K -гладкая граница области $U(U \subset \overline{U} \subset G/\overline{\Omega})$ и пусть задача*

$$L^+v = 0 \ (\text{в } U), \ D^\alpha v|_K = 0 \ (|\alpha| \le m-1) \tag{27}$$

имеет в $C^\infty(U)$ лишь тривиальное решение. Тогда справедливо заключение теоремы 1 с заменой в (3) $|\alpha| \le 2m-1$ на $|\alpha| \le m-1$.

Доказательство. Снова строим функцию $\omega_0(y)$. Теперь она удовлетворяет (22),(23) с $|\alpha| \le m-1$. Тогда ω_0 - решение в U задачи (27) и, следовательно, $\omega_0 \equiv 0$ в U. Из единственности задачи Коши следует $\text{supp}\omega_0 \subset \overline{\Omega}$, и доказательство заканчивается, как и выше.

4.3. **Теорема 3**. *Пусть в условиях теоремы 1 последовательность (y_k) плотна в открытом множестве $U(U \subset \overline{U} \subset G/\overline{\Omega})$. Тогда справедливо заключение теоремы 1 с заменой в (3) $|\alpha| \le 2m-1$ на $|\alpha| = 0$.*

4.4. Все результаты с теми же доказательствами остаются справедливыми и в случае, когда $L(x, D)$ - однородная эллиптическая система.

4.5. Утверждения остаются справедливыми, если $L(x, D)$ - система, эллиптическая по Петровскому. В последнем случае $L^+(x, D)$ - система, эллиптическая по Дуглису-Ниренбергу, и рассуждения надо несколько изменить.

Пусть $L(x, D)$ - система порядка $(T, S)(T = (t_1, \ldots, t_N), t_1 \ge \ldots \ge t_N, S = (0, \ldots, 0))$ эллиптическая по Петровскому, а задача (1) эллиптическая с нормальными граничными условиями [12].Тогда формально сопряженная задача (9) также будет эллиптической, однако теперь $L^+(x, D)$ - эллиптическая по Дуглису-Ниренбергу система порядка (T', S'), $T' = (t_1', \ldots, t_N')$, $S' = (s_1', \ldots, s_N')$, $t_j' = t_1$, $s_j' = t_j - t_1$. Для существования г.ф.р. $\Phi(x, y) =$

$(\Phi_{jk}\ (x,y))_{j,k=1,\dots,N}$ оператора L снова необходима и достаточна единственность задачи Коши для уравнения $L^+u = 0$ [7]. При этом для каждого $f \in (L_p(G))^N$ существуют интегралы

$$u_j(x) = \sum_{k=1}^{N} \int_G \Phi_{jk}(x,y) f_k(y) dy \ \ (j = 1, \dots, N),$$

оператор $f \to u_j$ непрерывно действует из $(L_p(G))^N$ в $H^{t_j,p}(G)$ и $Lu = f$ в G. Замыкание отображения $f \to u_j$ непрерывно действует в паре пространств

$$(H^{s,p}(G))^N \to \begin{cases} H^{t_j+s,p}(G) \ \ (s < 0,\ t_j + s \geq 0; \\ H^{\prime t_j+s,p}(G) \ \ (s < 0,\ t_j + s < 0). \end{cases}$$

Для существования нормального г.ф.р. $\Phi(x,y)$ в G необходима и достаточна единственность задачи Коши как для уравнения $L^+u = 0$, так и для уравнения $Lu = 0$. При этом а/ по x матрица $\Phi(x,y)$ является г.ф.р. оператора $L(x,D)$; б/ для каждой функции $g \in (L_p(G))^N$ существуют интегралы

$$v(x) = \int_G \Phi^*(x,y) g(y) dy \in (H^{t_N,p'}(G))^N,$$

$v(x)$ является внутри G обобщенным решением системы $L^+v = 0$; в/ если
$g \in H^{s-S',p'}(G) \equiv \prod_{1\leq j\leq N} H^{s-s',p'}(G) \quad (s \geq 0)$, то $v \in H^{T'+s,p'}(G') \equiv$
$\equiv \prod_{1\leq j\leq N} H^{t'_j+s,p'}\ \ (G')\ \ (G' \subset \overline{G'} \subset G)$ и v -решение внутри G уравнения $L^+v = g$, $\sum_{1\leq j\leq N} \|v_j, G'\|_{t'_j+s,p'} \leq c \sum_{1\leq j\leq N} \|g_j, G\|_{s-s'_j,p'}$.

Замыкание отображения $g \to v_j = (\int_G \Phi^*(x,y) g(y) dy)_j$
$(g \in \prod_{1\leq j\leq N} H^{-s'_j,p'}\ (G))$ непрерывно действует в паре пространств

$$H^{-S'+s,p'}(G) \to \begin{cases} H^{t_1+s,p'}(G) \ \ (s < s'_N = t_N - t_1,\ t_1 + s \geq 0), \\ H^{\prime t_1+s,p'}(G) \ \ (s \leq s'_N,\ \ t_1 + s < 0), \\ H^{t_N,p'}(G) \ \ (s'_N < s < 0). \end{cases}$$

Эти свойства г.ф.р. позволяют повторить приведенные выше рассуждения и убедиться, что теоремы 1-3 справедливы для задач, эллиптических по Петровскому.

1. *Schechter M.*, General boundary value problems for elliptic partial differential equations // Comm. Pure a Appl. Math. - 1959. - **12**, - *N* 3. - P. 457-486.
2. *Березанский Ю.М.* , Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов // Киев : Наук.думка. - 1965. - 800 с.
3. *Лионс Ж.,Мадженес Э.* , Неоднородные граничные задачи и их приложения // *М.:* Мир. - 1971. - 371 с.
4. *Ройтберг Я.А.* , Эллиптические граничные задачи в обобщенных функциях // *I-I.*Чернигов: Пединститут - *I.1990. II.1990. III.1991. I.1991.* - 75 с., 84 с., 125 с., *131 с.*
5. Hamann U. , Approximation mittels inearcombinationen von Fundamentallosungen elliptischer Differentialoperatoren // Math.Nachr. - 1991. - **154**. - C. 265-284.
6. Hamann U. , Approximation by linear combinations of fundamental solutions of elliptic differential operators // Abstracts of the conf. "Eliptic Boundary Value problems." March 16-20. - 1992.
7. *Мех /Ройтберг/ И.Я.* , О фундаментальных решениях эллиптических операторов // Докл. АН Украины. - 1991. - *N* 5. - С. 14-18.
8. *Hamann U., Wildenhain G.*, Approximation by solutions of general boundary value problems for elliptic equations // Partial diff. equations, Banach center publications. - 1987. - *N* 19. - P. 113-119.

9. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.*, О плотности решений граничных задач с локализованными правыми частями в функциональных пространствах на многообразиях // Докл. АН СССР. – 1989. – **305**. – *N 6*. – С. 1317–1320.
10. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.*, О плотности решений граничных задач для эллиптических по Петровскому систем в функциональных пространствах на многообразиях // Докл. АН Украины. – 1990. – *N 9*. – С. 17–20.
11. *Ройтберг Я.А.*, О значениях на границе области обобщенных решений эллиптических уравнений // Мат. сб. – 1971. – **86(128)**. – *N 2(10)*. – С. 246–267.
12. *Ройтберг Я.А., Шефтель З.Г.*, Теорема о гомеоморфизмах для эллиптических систем и ее приложения // Мат. сб. – 1969. – **78**. – *N 3*. – С. 446–472.